

M A T H E S I S

SEZIONE DI VARESE

IL PROBLEMA DELLA MISURA

E I NUOVI

CAMPI DI APPLICAZIONE

ANNO SOCIALE 1990-1991

INTRODUZIONE

Interessarsi di misura significa occuparsi di uno dei concetti (o dei temi) fondamentali della propria disciplina per un docente di matematica o fisica, e nell'attività della sezione varesina della MATHESIS, Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche, che si cura prioritariamente di aggiornamento e formazione degli insegnanti, la misura ha occupato un posto significativo, ma, forse non adeguato all'importanza del tema.

Da qui la volontà di dedicare un ciclo di conferenze alla misura in matematica, in fisica, e, perché no, nella valutazione scolastica.

E' indubbio che l'importanza dell'argomento, anche per i non "addetti ai lavori" sia andata aumentando con lo sviluppo degli strumenti e dei mezzi di comunicazione, investendo campi nuovi o estranei a queste problematiche fino a pochi anni fa. E nell'attività della sezione varesina, della Mathesis, che ha sempre cercato di offrire incontri su temi di interesse più generale che non il didattico, non poteva mancare questa proposta di attualità.

Da qui il desiderio di esplorare alcune, almeno, di queste nuove applicazioni, allargando il ciclo di incontri a discipline come la Teoria dell'Informazione, la Statistica.

Questo volumetto raccoglie i testi delle conferenze che i relatori hanno voluto gentilmente mettere a disposizione:

I FRATTALI: CAPITOLO NUOVO DELLA GEOMETRIA

1 - Le origini remote. L'analisi del concetto di continuo ed in particolare del continuo geometrico.

Quando si guardi con una certa attenzione alla evoluzione del pensiero scientifico è facile osservare che esistono delle "mode", anche in questo campo, che potrebbe essere considerato immune e distaccato dalla variabilità subitanea, dagli umori, dai pareri contingenti e variabili, e dedito invece alla ricerca di ciò che è stabile ed in certo modo superiore al fluire del tempo; in altre parole un campo in cui si tenta di realizzare quel mondo eterno e quindi immutabile delle idee che già Platone aveva tratteggiato nelle sue opere.

La realtà è invece alquanto diversa dalla opinione, come accade quasi sempre; invero assistiamo quotidianamente alla fortuna di certe teorie che vengono portate alla ribalta da gonfiature giornalistiche, forse bene orchestrate, che fanno un certo rumore e che vengono poi regolarmente dimenticate; come accade di molte mode: esempi recenti ci sono forniti, tra l'altro, dalla teoria chiamata delle "catastrofi", la quale forse deve parte della sua fortuna alla denominazione quanto meno allarmante; un altro esempio, a nostro parere, è fornito dalla teoria che tratta di certi oggetti chiamati con il nome nuovo e suggestivo di "frattali"; e forse l'aspetto suggestivo, ed il rumore che è stato fatto intorno a queste teorie non è molto positivo. Esso infatti potrebbe far nascere il sospetto di un eccesso di pubblicità, destinata ad attrarre l'attenzione su un argomento che non ne merita molta, o almeno non la merita nella misura in cui essa è stata ottenuta; si tratta invece di una teoria che riguarda uno dei concetti più importanti della matematica, e sfiora da vicino una problematica secolare, che ha attinenza con le questioni più scottanti riguardanti il significato, la portata ed il valore della nostra conoscenza.

Noi pensiamo infatti che la teoria dei frattali si ricolleggi strettamente con i problemi riguardanti il concetto di "continuità"; concetto che è stato oggetto di attenzione da parte del pensiero greco, ed è stato analizzato via via da filosofi e matematici nell'arco di tutta la storia del pensiero umano rigoroso.

Per quanto riguarda il pensiero greco, ricordiamo qui per esempio i celebri paradossi della filosofia eleatica (il paradosso detto di "Achille", il paradosso del moto ecc.), i quali possono essere considerati attinenti strettamente

al problema del continuo fisico; inoltre è stato osservato ripetutamente che una delle conseguenze del teorema di Pitagora si può enunciare dicendo che esistono delle coppie di segmenti tra loro incommensurabili, come per esempio il lato di un quadrato e la sua diagonale; e questa esistenza di coppie di segmenti incommensurabili porta come conseguenza la non esistenza di un "grano", di un "atomo" di quell'ente immaginario che viene abitualmente chiamato "spazio geometrico".

Inoltre l'immagine della continuità ha costituito il fondamento della concezione della materia, quale è stata costruita dalla scienza fisico-matematica dall'epoca di Galileo e Newton in poi, fino al nostro secolo. Gli esempi che si possono dare sono tanto numerosi che esiste soltanto l'imbarazzo della scelta. Si potrebbe dire addirittura che il calcolo infinitesimale non sarebbe nato senza l'immagine del continuo; e l'applicazione del calcolo infinitesimale alla meccanica razionale non ci sarebbe stata se non ci fosse stata nella mente dei fisici la convinzione che la struttura degli oggetti materiali viene riprodotta in modo soddisfacente dallo schema astratto del continuo geometrico.

La validità di queste nostre osservazioni è confermata dal fatto che la proprietà di continuità degli oggetti materiali, ed in generale degli enti studiati dalla fisica, è stata enunciata come un principio da D. Bernoulli, ed è stata presa in considerazione da R. Boscovich come un concetto unificatore per la conoscenza del mondo fisico. Nell'ambito della matematica pura ricordiamo infine che V. Poncelet ha tentato di fare del concetto di continuità geometrica addirittura uno strumento di deduzione, ed un principio unificatore delle procedure della geometria.

La maturazione critica della matematica, avvenuta durante il secolo scorso, ha messo in evidenza la necessità di precisare in concetto di continuo geometrico e di definire in modo rigoroso il concetto di funzione continua. Si è giunti così alla enunciazione precisa, prima con i mezzi del linguaggio comune, e poi con i mezzi della logica simbolica, di quella proprietà della retta geometrica che era stata considerata per secoli come chiara, e qualificata come "intuitiva"; ciò ha permesso di colmare le lacune tradizionali di certe dimostrazioni della geometria elementare, dimostrazioni la cui validità era stata considerata per secoli fondata su una pretesa "intuizione geometrica" che non si sapeva precisare ulteriormente. Un esempio di queste lacune si ha nella prima proposizione del libro primo degli Elementi di Euclide, laddove il grande geometra greco costruisce il punto medio di un segmento qualunque intersecando le due circonferenze, ognuna delle quali ha come centro un estremo del segmento dato e come raggio la lunghezza del segmento stesso; invero la esperienza materiale concreta del tracciamento delle circonferenze

ci presenta come del tutto certo il fatto che esse si intersechino in due punti distinti; ma si può osservare che questa esperienza non è affatto un argomento rigorosamente probatorio, perché l'esistenza delle intersezioni delle due circonferenze in parola non è dedotta logicamente dalle proposizioni enunciate in precedenza. E del resto già Platone aveva ammonito che l'oggetto delle considerazioni del matematico non sono le figure tracciate sulla sabbia, ma i concetti dei quali le figure stesse sono soltanto i simboli più o meno adeguati; segue di qui che le costruzioni e le figure non possono essere fondamenti di deduzioni rigorose. La proprietà di continuità, oltre che le figure geometriche come la retta, è stata poi enunciata anche a proposito delle grandezze in generale; tale enunciazione ha permesso di colmare alcune celebri lacune nella teoria classica delle proporzioni. Sappiamo anche che, parallelamente ad una costruzione rigorosa del concetto di continuità per le grandezze, è stata sviluppata, in vari modi e con vari atteggiamenti, la costruzione del campo reale, ottenendo così un insieme di strumenti simbolici adeguati alla rappresentazione ed alla conoscenza completa di quegli enti della realtà che si presentano alla nostra immaginazione come continui.

Con un procedimento parallelo a quello della geometria, anche l'analisi matematica ha precisato il significato della proprietà di continuità delle funzioni, di una o più variabili; proprietà che era stata spesso considerata come "evidente", ovviamente in forza dei riferimenti alla realtà fisica che questi strumenti matematici rappresentavano. Ma neppure questa proprietà può essere fondata sulla validità di quei riferimenti, di modo che si rese presto evidente la necessità di enunciare rigorosamente il concetto di continuità delle funzioni di variabile reale, in modo tale che le proprietà di questi enti potessero essere oggetto di deduzione ineccepibile, non basata soltanto sul ricorso, ancora una volta, ad una pretesa "intuizione" geometrica, o ad una realtà materiale che, come abbiamo detto, non può essere fondamento di deduzione teorica.

Nelle pagine che seguono cercheremo di presentare alcuni momenti particolarmente significativi di questa evoluzione critica della matematica, a cui facciamo riferimento. Tuttavia vorremmo prima aggiungere una osservazione a ciò che abbiamo detto fin qui, osservazione che forse può aiutare a comprendere, almeno in parte, alcune complicazioni presentate dalla problematica del continuo. Questa problematica infatti ci appare collegata con quella degli insiemi infiniti; pare quindi naturale che essa presenti molte delle aporie dell'infinito matematico; aporie e difficoltà che si sono presentate alla meditazione dei pensatori durante i secoli. Abbiamo già accennato ai paradossi presi in considerazione dal pensiero greco; ci limitiamo ad aggiungere

qui la banale osservazione che, per esempio nel caso delle grandezze, la proprietà di continuità richiede necessariamente la possibilità di indefinita divisibilità. E d'altra parte lo strumento matematico che è stato escogitato per dominare completamente le grandezze continue, cioè il numero reale, fa riferimento necessariamente ad algoritmi infiniti. Esso quindi ripresenta da parte sua tutte le difficoltà, logiche e concettuali, di questi algoritmi.

2 - Gli esempi classici: l'insieme triadico di Cantor, la "curva" di Peano e quella di von Koch.

Abbiamo accennato poco fa alle analisi del concetto di continuo, che accompagnarono la profonda crisi della matematica, crisi che ebbe il suo inizio verso la metà del secolo scorso ed ebbe come oggetti i fondamenti di questa scienza. Tra questi fondamenti ricordiamo i concetti iniziali della geometria, ed i procedimenti infiniti. Abbiamo anche ricordato la costruzione rigorosa del campo dei numeri reali, che ha fornito gli strumenti formali, per così dire "linguistici", che permettono di rappresentare gli oggetti della nostra esperienza, e di dedurre le proprietà di questi oggetti da certe proposizioni (in generale poche) accettate come iniziali.

Tra le menti che hanno contribuito in modo insostituibile al progresso della matematica ricordiamo quella di G. Cantor; con la sua teoria degli insiemi, con la costruzione del concetto di numero transfinito, Cantor ha portato avanti l'analisi del concetto di infinito matematico: ed abbiamo osservato che il concetto di continuo geometrico si accompagna, in modo quasi necessario, al concetto di infinito matematico; proprio perché, ripetiamo, al concetto di continuo si accompagna la possibilità di indefinita divisibilità, cioè di infinita ripetibilità di certe operazioni, immaginate eseguibili senza alcun limite.

Queste riflessioni giustificano la presentazione del classico insieme di Cantor; questo viene chiamato "triadico", per ragioni che appariranno subito, e verrà da noi qui indicato nel seguito come "insieme T"; esso costituisce un esempio caratteristico di quegli oggetti geometrici che vengono oggi chiamati "frattali". La descrizione dell'insieme T di Cantor potrebbe essere data nel modo seguente: si immagini un segmento; per semplicità potremo pensare all'insieme dei punti che hanno coordinate non minori di zero e non maggiori di uno in un sistema di coordinate ascisse, stabilito sulla retta a cui

il segmento appartiene. Dal segmento considerato sopprimiamo i punti le cui coordinate sono superiori ad $1/3$ e minori di $2/3$, quindi, con riferimento alla immagine geometrica, dividiamo il segmento in tre parti uguali e sopprimiamo i punti interni alla parte centrale; rimarranno quindi i due segmenti laterali, e su di questi potremo ripetere l'operazione che prima abbiamo eseguito sul segmento intero. Rimarranno quattro segmenti, su ognuno dei quali si potrà ripetere l'operazione eseguita sul segmento intero, e così via. L'insieme dei punti della retta che rimane dopo aver ripetuto indefinitamente le operazioni descritte è appunto l'insieme T .

Questo possiede alcune proprietà che possono giustamente essere qualificate come paradossali: per esempio si dimostra che l'insieme di Cantor può esser posto in corrispondenza biunivoca con l'intero segmento; quindi, secondo la terminologia degli insiemi, esso ha la "potenza" del continuo; tuttavia si dimostra anche che la somma della serie i cui termini sono le lunghezze dei segmenti che sono stati soppressi durante la procedura di costruzione dell'insieme è uguale ad uno, cioè è uguale alla lunghezza del segmento unitario iniziale. Volendo indulgere ad una descrizione suggestiva e pittoresca della procedura esposta, si potrebbe dire che l'aspetto paradossale del risultato consiste nel fatto che, per così dire, si è soppresso l'intero segmento, asportando via via le parti centrali dei segmenti rimasti dopo le asportazioni precedenti; ma i punti che rimangono sono ancora tanti quanti quelli del segmento di partenza.

La dimostrazione di questo fatto è data dalla Nota (1), alla quale rimandiamo. Qui ci limitiamo ad osservare che l'aspetto sorprendente dell'oggetto costruito da Cantor nasce dalla confusione che si fa abitualmente tra la "numerosità" di un insieme di punti e la sua estensione; si tratta invece di due concetti ben distinti, e la esistenza dell'insieme T è la dimostrazione di questa distinzione, che la nostra immaginazione fa con qualche difficoltà e che invece appare del tutto chiara all'intelligenza che ragiona.

Del resto ricordiamo qui che i ragionamenti rigorosi sugli insiemi infiniti presentano spesso degli aspetti apparentemente paradossali; questo fatto era già stato fatto rilevare da Galileo; con osservazioni di grande profondità e chiarezza (2).

Sono state proposte delle procedure che si riducono in sostanza a delle generalizzazioni, più o meno originali, di quella presentata da Cantor; si ottengono così degli insiemi che presentano problematiche analoghe a quella dell'insieme originario di Cantor.

L'insieme triadico di Cantor, insieme con le sue generalizzazioni, non è il solo oggetto geometrico che presenti degli aspetti paradossali; altri numerosi oggetti sono stati costruiti e tra questi ricordiamo quelli che hanno costretto i matematici a precisare un concetto che era sempre stato ritenuto chiaro ed immediato; tale concetto è quello di linea curva, oggetto che qui di seguito verrà brevemente indicato con il termine abbreviato di "curva".

E' opinione comune che questo concetto abbia la sua origine dalle nostre esperienze immediate; ognuno ha tracciato delle curve sulla carta con la punta di una matita, oppure ha immaginato la traiettoria nello spazio di un oggetto piccolo. A queste esperienze elementari, e ad altre osservazioni numerosissime e quotidiane noi associamo spesso anche il concetto di dimensione, e siamo quindi convinti di dire delle cose molto chiare affermando, per esempio, che la curva è un oggetto ad una sola dimensione, mentre un poligono ne ha due. Ancora, nessuno dubita che la circonferenza sia una linea ad una sola dimensione, mentre il cerchio limitato da essa ne ha due.

Inoltre la meccanica razionale deve risolvere una quantità di problemi nei quali le situazioni sono schematizzate con il movimento di certi oggetti idealizzati con punti; è quindi spiegabile che l'abitudine a queste rappresentazioni simboliche e schematiche, richieste dalla meccanica ed in generale dalla fisica, abbia generato la errata convinzione che l'oggetto geometrico "curva" sia rappresentabile con funzioni continue di un parametro; tale parametro, sulla scorta delle abitudini della meccanica, veniva spesso indicato come una variabile temporale, ribadendo così l'abitudine di identificare l'oggetto "linea curva" con la traiettoria di un punto che si muove.

Questa convinzione erronea fu demolita da un risultato clamoroso, dovuto al matematico italiano G. Peano, il quale costruì una coppia di funzioni continue di un parametro, in modo tale che il punto avente come coordinate quelle funzioni passi per tutti i punti di un quadrato. Come si è detto, il risultato fu considerato clamoroso, anche in forza del titolo abbastanza provocatorio che il Peano diede al suo articolo (3). Altri esempi di oggetti analoghi furono costruiti in seguito; cessata la sorpresa che accolse la costruzione di Peano, si comprese che il suo aspetto paradossale era dovuto semplicemente al fatto che il termine "curva" era stato fin a quel tempo associato ad un oggetto costruito sulla base della esperienza; inoltre si era erroneamente pensato che un oggetto cosiffatto potesse venir rappresentato da rappresentazioni parametriche le quali soddisfano soltanto alla richiesta di continuità; la scoperta di Peano mise in evidenza il fatto che queste sole ipotesi non sono sufficienti per rappresentare con simboli matematici gli oggetti della nostra esperienza.

E' noto che la curva di Peano non è il solo oggetto geometrico che presenta aspetti paradossali per le nostre immagini abituali; altri oggetti paradossali sono le curve prive di retta tangente in ogni loro punto.

Anche in questo caso, come abbiamo già detto, l'aspetto paradossale di questi oggetti deriva dalle nostre abitudini e dalle nostre esperienze; riferendoci per esempio al tracciamento che ognuno può fare di una linea curva con una matita appuntita, appare del tutto evidente che in ogni punto di questa linea (salvo tutt'al più un certo numero di punti da considerarsi come "singolari") esista una retta che viene chiamata "tangente" alla curva stessa. Ciò si verifica per la circonferenza, che è la curva più semplice che noi impariamo a tracciare in geometria elementare; più in generale, questo avviene per le linee curve che sono i grafici delle funzioni elementari dell'analisi matematica, grafici ottenuti con le ordinarie convenzioni della geometria analitica. Dalla storia della matematica sappiamo che proprio il problema del tracciamento delle tangenti ha condotto i fondatori del calcolo infinitesimale al concetto di "funzione derivata" di una funzione data. Ed accanto a questo problema posto dalla geometria, viene citato anche il problema della definizione della velocità di un punto che si muove, posto dalla meccanica razionale.

Appare quindi accettabile il pensare che il concetto di retta tangente ad una curva sia nato dalla esperienza concreta, idealizzata e concettualizzata, e che le proprietà possedute dalle poche funzioni matematiche conosciute all'epoca fossero accettate come "evidenti", e come conseguenze necessarie della continuità delle funzioni stesse. Uno dei primi esempi di funzione continua senza derivata (se non il primo addirittura) fu costruito dal grande matematico tedesco Karl Weierstrass; volendo far ricorso ad un linguaggio suggestivo, anche se poco preciso, si potrebbe dire che il diagramma cartesiano di una funzione cosiffatta è un insieme di punti che non può essere chiamato "curva" nel senso intuitivo del termine, anche se la funzione stessa è continua. Infatti non è possibile definire in alcun punto del diagramma una retta che sia tangente (nel senso abituale del termine) al diagramma stesso. Naturalmente questo fatto non demolisce i concetti geometrici a cui noi siamo abituati né le teorie che abbiamo costruito: semplicemente la scoperta di questi oggetti ha costretto i matematici a precisare le proprietà degli strumenti concettuali che si utilizzano per rappresentare gli oggetti della nostra esperienza.

Sono state costruite, dopo Weierstrass, moltissime altre funzioni che hanno la proprietà di quella da lui costruita; volendo far ricorso al linguaggio geometrico, diremo che sono state costruite moltissime "curve" che hanno proprietà analoghe a quelle del grafico della funzione di Weierstrass. La no-

stra attenzione si concentra in particolare su uno di questi oggetti, la cui descrizione ci servirà per introdurre l'argomento degli oggetti oggi molto studiati, che vengono chiamati "frattali". L'oggetto di cui vogliamo parlare viene chiamato "curva di von Koch"; anche in questo caso non si tratta di una linea nel senso abituale ed intuitivo del termine; si tratta di un insieme costituito da infiniti punti, le cui coordinate sono funzioni continue di un parametro reale t appartenente ad un intervallo numerico, per esempio all'intervallo definito dalle relazioni:

$$0 \leq t \leq 1.$$

Tuttavia l'insieme dei punti stessi è tale che in nessun suo punto si può tracciare una retta da potersi chiamare "tangente"; questa curva presenta quindi proprietà analoghe ai diagrammi della funzione di Weierstrass e di ogni altra funzione continua priva di derivata.

La costruzione della curva di von Koch si riattacca a quella dell'insieme T di Cantor di cui abbiamo detto sopra, ed alla cui descrizione ci riportiamo qui. Precisamente consideriamo la prima operazione che si esegue per costruire l'insieme di Cantor: essa consiste, come abbiamo visto, nel dividere il segmento unitario in tre parti uguali e sopprimere la parte centrale. Or bene costruiamo ora, sul terzo centrale del segmento, un triangolo equilatero, e consideriamo la linea spezzata poligonale costituita dai due terzi, per così dire, laterali del segmento e dai due lati del triangolo equilatero costruito sul terzo centrale prima soppresso. Tale spezzata poligonale è costituita da quattro segmenti, ognuno dei quali è uguale ad un terzo del segmento unitario di partenza; su ognuno dei quattro segmenti così ottenuti ripetiamo la costruzione eseguita sul segmento unitario, e così via indefinitamente. Si ottiene così una successione di poligonali, le prime delle quali hanno delle forme che richiamano quelle dei cristalli di ghiaccio. Se poi, invece di partire da un unico segmento per la prima operazione, si parte dai tre lati di un triangolo equilatero, si ottengono delle forme che richiamano i fiocchi di neve. L'insieme dei punti limite di quelli delle infinite poligonali è appunto la curva di von Koch.

Prima di proseguire nell'analisi delle questioni matematiche e logiche degli oggetti presentati fin qui, osserviamo di passaggio che si possono costruire molti altri esempi di oggetti geometrici che hanno proprietà analoghe. Uno di questi oggetti è la curva che si può ottenere nel modo seguente: si consideri un triangolo equilatero, e lo si divida in quattro triangoli uguali, congiungendo a due a due i punti medi dei lati; si otterrà una figura costituita da un triangolo per così dire, centrale e da quattro triangoli, pure equilateri,

ciascuno dei quali ha un vertice in comune con il triangolo di partenza. Si sopprime il triangolo centrale e si ripeta la operazione su ciascuno dei tre triangoli equilateri rimasti, e così via indefinitamente. L'insieme rimanente è costituito da punti le cui coordinate possono essere espresse come funzioni continue di un parametro: si tratta quindi di una "curva continua", la quale tuttavia non possiede tangente in alcuno dei suoi punti.

Enti analoghi a questo possono essere costruiti nello spazio tridimensionale abituale e addirittura in uno spazio ad un numero qualsivoglia di dimensioni.

3 - La ricerca di invarianti per i nuovi oggetti.

I pochi esempi che abbiamo descritto presentano degli aspetti di stranezza che ne accentuano il carattere paradossale.

Si capisce quindi che l'attenzione dei matematici sia stata attratta da questi oggetti e dai concetti che li reggono; potremmo considerare questa curiosità come l'occasione della nascita della moderna teoria di quegli enti che vengono chiamati "frattali", appunto per sottolineare la presenza di molti angoli, di molti spigoli, e l'assenza di quegli andamenti continui a cui ci hanno abituati le figure della geometria tradizionale. Occorre notare tuttavia che l'interesse di questa teoria non sta tanto nell'aspetto esteriore delle figure strane, ma nei tentativi di soluzione dei problemi logici e matematici suscitati da esse. Oggi invece sta diffondendosi l'uso di chiamare "frattali" certe figure inconsuete, che presentano degli spigoli o degli angoli o presentano delle ramificazioni irregolari ed imprevedibili; a questa stregua ovviamente dovremmo cambiare nome anche ai coralli.

Ripetiamo pertanto che l'interesse della ricerca matematica nei riguardi di questi oggetti non si basa sugli aspetti esteriori e, per così dire, pittoreschi di essi, ma è dovuto alla problematica logica che essi presentano.

Per risolvere i problemi posti da questi nuovi oggetti, pensiamo che in ogni caso sia necessario superare l'immaginazione per giungere alla costruzione di concetti rigorosi e capaci di condurre a conclusioni certe. Sappiamo infatti che i concetti geometrici sono costruiti dalla nostra fantasia estrapolando i dati delle sensazioni e delle esperienze e delle manipolazioni sugli oggetti che ci circondano; pertanto si potrebbe ribadire che l'immagine è il

necessario punto di partenza per la costruzione della geometria, ma non può essere fondamento di deduzioni e di conclusioni.

Questo atteggiamento era già presente nella tradizione classica della matematica medievale; ricordiamo qui un esempio classico, dato dal concetto di "miriagono" regolare, cioè dal poligono regolare di 10.000 lati.

Ovviamente la nostra fantasia e le nostre sensazioni ci danno ben poco aiuto per permetterci di distinguere questo poligono da un altro che ne abbia per esempio 9.999; ma il concetto astratto è chiarissimo, e la definizione permette di ottenere razionalmente, con gli strumenti della matematica, molte informazioni rigorose, precise ed utili in relazione a questa figura, sulla quale l'immagine dice ben poco. Per esempio il calcolo ci fornisce gli strumenti per calcolare la differenza di lunghezza dei lati dei due poligoni nominati, fino ad un ordine di approssimazione stabilito.

Rimane vero tuttavia il fatto che queste indagini, in certo senso nuove, sono state suggerite da osservazioni fatte sulla realtà fisica, e dalla opportunità di costruire nuovi strumenti concettuali per dominare tale realtà. Pensiamo per esempio ad una circonferenza, ricordata da uno dei creatori della teoria dei frattali (4), al quale si deve anche il nome con cui questi oggetti sono oggi designati: la lunghezza delle coste di un paese viene spesso data da fonti diverse con numeri molto diversi fra loro; oppure la lunghezza della linea di confine tra due paesi compare con valori molto diversi fra loro sugli annuari statistici dei paesi stessi; così per esempio la lunghezza della linea di confine tra Spagna e Portogallo viene misurata con 987 oppure con 1.214 km, quella della linea di confine tra Olanda e Belgio viene data con 380 oppure con 449 km. Questi fatti suscitano spesso il sorriso, o provocano commenti ironici, perché un osservatore superficiale potrebbe pensare che nulla vi sia di così certo ed incontestabile come la lunghezza di una linea di confine, lunghezza che si può misurare sul terreno con osservazioni concrete; cose analoghe si potrebbero dire sulla lunghezza di un corso d'acqua. Ma una breve riflessione conduce presto a rendersi conto di un fatto ben noto: il fatto cioè che l'applicazione di uno strumento concettuale astratto, come lo strumento matematico, alla realtà concreta materiale è in ogni caso soggetta a limiti, che nascono da una parte dalle modalità di applicazione dello strumento astratto, e dall'altra dalla inesauribile ricchezza della realtà che vogliamo conoscere. Nel caso del confine comune a due paesi, esso viene schematizzato con una linea, ma la misura concreta della lunghezza di questa richiede che i suoi punti siano materializzati per esempio con paletti, e che quindi la lunghezza della linea sia ottenuta sommando le lunghezze dei segmenti rettilinei che congiungono un paletto al successivo. Si comprende quindi che i risultati

dipendano, spesso in modo molto clamoroso, dalla tecnica di misura: nel caso in esame dalla scelta delle distanze tra un paletto ed un altro. Due scelte diverse possono benissimo portare a risultati diversi; e si osservi che sempre di scelte si tratta, perché è materialmente impossibile, e addirittura concettualmente inconcepibile, il poter piantare un paletto ad ogni piccolo risvolto della linea di confine.

Appare chiaro quindi che le differenze con le quali una medesima realtà viene presentata dipendono dalla scelta del concetto matematico che si vuole utilizzare per rappresentarla. Scegliamo, tra i tanti, un esempio addotto dal Mandelbrot, il creatore di questa nuova dottrina.

Si consideri un gomito di spago; visto da molto lontano esso può presentarsi come un punto; avvicinandosi esso si presenta come un solido, approssimativamente di forma sferica; guardato più da vicino, la nostra attenzione viene attratta dallo spago, e quindi lo stesso ente ci si presenta come una linea; ma lo spago, visto ancora più da vicino, ci si presenta come un solido, un lunghissimo tubo, e così via...

Queste immagini possono apparire a prima vista come contraddittorie, soprattutto a chi si domanda "che cosa è veramente" il gomito di spago. Ma la contraddizione viene superata quando si rifletta che nessuna di queste immagini può pretendere di rendere esattamente tutta la realtà del gomito; invece ciascuna di esse è più o meno adeguata per rendere alcuni aspetti della realtà stessa che di volta in volta vogliamo conoscere. Pertanto soltanto la nostra volontà ci fa arrestare nella analisi della realtà, e ci fa scegliere una immagine fra tutte le infinite possibili, ma la scelta è sempre fatta tenendo presente che nessuna immagine può essere completamente esaustiva.

L'impossibilità di esaurire tutta l'infinita ricchezza della realtà concreta non impedisce tuttavia la ricerca teorica sugli enti che la nostra ragione crea, a partire dalle immagini costruite dalla fantasia; e queste indagini non sono per nulla vane oppure inutili, come potrebbe pensare qualche osservatore superficiale; anzi esse costituiscono un vero e proprio progresso, non solo nel campo astratto della geometria pura, ma anche nel campo concreto delle possibilità applicative degli strumenti matematici.

Per renderci conto della verità di ciò che diciamo, rifacciamoci all'esempio del "miriagono" di cui abbiamo detto sopra. Sarebbe poco intelligente rifiutarsi di studiare questa figura, con il pretesto che "praticamente" (come si sente dire spesso) essa "si confonde" con la circonferenza; infatti può avvenire che la distinzione sia inutile per gli scopi della manipolazione quotidiana della materia, a livello della tecnica artigianale o della tecnologia ordinaria;

ma può benissimo darsi che tale distinzione possa diventare essenziale per una tecnologia iperfine, oppure per esempio per imprese spaziali, nelle quali le differenze che non sono colte dai nostri sensi qui sulla Terra, diventano invece pesantemente sensibili se dilatate a distanze astronomiche.

Pertanto possiamo dire che, per la matematica, non vi sono numeri "piccoli" in assoluto, o numeri "grandi"; e quindi non vi sono errori che siano trascurabili in ogni caso: ogni problema ammette un proprio ordine di approssimazione, ed ogni informazione teorica deve poter essere in ogni caso migliorata, anche se la realtà materiale a cui lo strumento matematico viene applicato non richiede per il momento il miglioramento delle informazioni in nostro possesso.

Risulta quindi interessante il poter dominare in qualche modo anche gli oggetti che sembrano sfuggire alla immaginazione, ma che non debbono sfuggire al ragionamento ed alla deduzione rigorosa. Questa ci permette di identificare alcune proprietà di questi oggetti, le quali vengono espresse con numeri reali; presenteremo qui una di queste proprietà, che viene chiamata la "dimensione frattale" di una curva che non abbia tangente in alcun suo punto. Per poter introdurre questo concetto, ricordiamo ciò che è stato detto sopra, a proposito della determinazione della lunghezza del confine comune a due Paesi: abbiamo osservato che le discrepanze tra le informazioni sono dovute alle diverse tecniche con le quali tali lunghezze sono state convenzionalmente misurate: tali misure infatti sono state eseguite infiggendo dei paletti nel terreno e sommando poi le lunghezze dei segmenti rettilinei che congiungono ogni paletto con il successivo: sarebbe infatti praticamente impossibile seguire con questa tecnica ogni minima frastagliatura del terreno, piantare un paletto ad ogni sassolino: Si può dire di più: questa operazione non soltanto è chiaramente ineseguibile nella pratica, ma porterebbe a misure sempre crescenti, ed i numeri che le rappresentano formerebbero un insieme non superiormente limitato.

E' tuttavia possibile, in certi casi, trovare la legge secondo la quale tale misura tende all'infinito; i casi in questione sono quelli in cui la tendenza può essere rappresentata mediante opportune funzioni, che vengono giudicate particolarmente semplici dai matematici. Ovviamente questo giudizio è basato sulle abitudini e sullo sviluppo storico della scienza: ci pare chiaro infatti che certe funzioni sono considerate come "semplici" o addirittura "elementari" per ragioni tradizionali e storiche: per esempio viene considerata tale la funzione "logaritmo" anche perché essa risulta tabulata fino dal secolo XVII, e pertanto la ricerca dei suoi valori viene considerata come una elementare ricerca di informazioni da parte degli utenti della matematica.

Analoghe considerazioni potrebbero essere svolte a proposito delle funzioni trigonometriche, la cui tabulazione risale all'epoca della geometria alessandrina.

Fatte queste precisazioni, prendiamo in considerazione alcuni tra gli esempi considerati: la loro trattazione è resa particolarmente semplice da una circostanza importante, che si verifica tanto nel caso dell'insieme triadico di Cantor che in quello della curva di von Koch: ogni più piccola parte dell'insieme di punti considerato è simile (nel senso elementare della geometria) all'insieme completo; questo fatto viene espresso dicendo che tali insiemi sono "autosimili"; sia per esempio la curva di von Koch: dato un qualunque segmentino che si ottiene da una suddivisione eseguita ad uno stadio qualunque della costruzione, l'insieme che si costruisce sul segmentino considerato è simile all'insieme completo. Indichiamo ora con d la lunghezza del segmento iniziale; ad ogni operazione che abbiamo descritto, la lunghezza della poligonale costruita viene moltiplicata per $\frac{4}{3}$ e la lunghezza di ogni segmento sul quale si esegue la operazione successiva viene ridotta a $\frac{d}{3}$.

Consideriamo ora la funzione:

$$L(d) = d^{(1-D)}$$

è possibile determinare il numero reale D in modo tale che, ad ogni stadio della costruzione della curva di von Koch, la somma dei valori della funzione, calcolati per ogni lato della poligonale che si ottiene, rimanga invariata in ogni stadio della costruzione; si verifica che per tale scopo deve essere soddisfatta l'equazione:

$$\left(\frac{d}{3}\right)^{1-D} = \frac{4}{3} d^{1-D}$$

equazione che ha come soluzione:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618\dots$$

Questo numero esprime quindi una proprietà della curva di von Koch, che discende dalle modalità della sua costruzione e quindi in sostanza dalla sua definizione. In numero così ottenuto viene chiamato "dimensione frattale" della curva di von Koch.

In relazione all'insieme triadico di Cantor possono essere svolte delle considerazioni analoghe, che non stiamo a riportare qui. In seguito a queste considerazioni si giunge ad attribuire all'insieme di Cantor la dimensione:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\dots$$

Altre considerazioni possono essere svolte, ed altri insiemi possono essere costruiti; insiemi di punti che sono considerati come inconsueti, oppure (pittorescamente) mostruosi da parte di chi era legato a certe abitudini mentali. In particolare, possono essere costruiti degli oggetti geometrici di questo tipo in relazione a certe funzioni complesse di variabile complessa: data che sia una funzione di questo tipo, nasce spesso il problema di determinare l'insieme o gli insiemi dei valori della variabile in corrispondenza ai quali la funzione risulta essere regolare; tali insiemi vengono spesso chiamati "insiemi di olomorfia" della funzione. Nel piano di Gauss, che con i suoi punti rappresenta i numeri complessi, gli insiemi di olomorfia di una funzione possono presentare una struttura analoga a quella delle figure considerate negli esempi presentati finora. Esempi numerosi si hanno, naturalmente, in relazione a funzioni di più variabili complesse. L'analisi logica, utilizzando gli strumenti matematici, permette di studiare le proprietà di queste costruzioni della nostra mente, anche quando tali proprietà sembrano non accessibili a quella che viene spesso chiamata "intuizione geometrica".

4 - Fantasia e logica: l'estrapolazione immaginata ed il rigore deduttivo.

Nelle pagine precedenti abbiamo esposto soltanto pochissimi esempi delle idee che hanno aperto un nuovo campo di ricerche geometriche. Pare infatti fuori dubbio che queste idee possano portarci avanti nella conoscenza delle procedure della nostra mente; si tratta quindi di un effettivo progresso, rispetto alla situazione che esisteva soltanto qualche decennio fa. Vorremmo ricordare, a questo proposito, che lo stesso Peano, nell'espone la problematica riguardante il concetto di dimensione, faceva notare quanto la visione intuitiva fosse inadeguata, perché, secondo le sue parole "... non esiste un carattere specifico che distingue la linea dalla superficie" (5).

Nello stesso passo della sua opera egli presenta una procedura per stabilire una corrispondenza biunivoca tra il segmento ed il quadrato; tuttavia tale procedura, già nota prima della sua classica memoria, non risultava continua, ovviamente rispetto alla nozione di distanza euclidea, accettata come valida nella topologia del quadrato. Pertanto la originalità del lavoro di Peano consiste nell'aver trovato una procedura per stabilire la corrispondenza biunivoca tra segmento e quadrato in modo che la continuità fosse rispettata.

Ovviamente gli approfondimenti recenti permettono di chiarire molti aspetti della problematica del continuo, ma insieme aprono molti problemi, che riguardano da una parte i concetti della geometria e dall'altra i concetti della logica, a cui è demandata la soluzione del problema di precisare il significato di quei procedimenti infiniti che stanno alla base della costruzione di questi nuovi oggetti che abbiamo presentato.

Nelle pagine che precedono abbiamo spesso fatto riferimento alle abitudini mentali, che sovente impacciano il nostro pronto adeguarci alla coerenza dei concetti. Si potrebbe aggiungere che quasi sempre, nel corso della storia della scienza, le grandi scoperte sono state fatte da chi è stato capace di superare le abitudini universalmente adottate, di uscire dai solchi già tracciati e di trovare delle nuove strade per la ricerca. Occorre tuttavia ricordare che spesso le abitudini mentali sono giustificate dall'appoggio delle immagini costruite dalla nostra fantasia. Questa facoltà infatti ci aiuta a costruire nuove teorie o ad intuire nuove relazioni tra le cose che osserviamo; ma spesso anche ci offre delle immagini così invadenti, così comode, così apparentemente chiare che rende molto difficile il rinunciare al loro appoggio per confidare soltanto nella ragione.

Nell'ambito del sapere matematico, pensiamo che una delle serie di immagini più suggestive, più utili ma forse anche più invadenti e bloccanti sia quella che si riferisce alla continuità o genericamente all'infinitamente piccolo. I problemi del continuo geometrico sono stati studiati fin dall'epoca della speculazione filosofica e scientifica dei Greci. Abbiamo detto che forse senza l'immagine della continuità non sarebbe nato il calcolo infinitesimale e quindi forse non esisterebbe la matematica di oggi, e di conseguenza neppure la fisica di oggi. Ma appare anche fuori dubbio il fatto che l'immagine abituale del continuo, ed in particolare del continuo geometrico, blocca in qualche modo la nostra capacità di costruire delle teorie coerenti dell'esperienza. Abbiamo accennato alla legge di continuità, alla sentenza secondo al quale "Natura non facit saltus", che è stata elevata a legge universale del sapere scientifico da vari pensatori, come Leibnitz, i Bernoulli, Boscovich.

Come abbiamo detto, probabilmente noi incontriamo qualche difficoltà per il fatto che i concetti della geometria non sono ottenuti direttamente sulla astrazione dalla esperienza, ma sono il frutto della elaborazione e della estrapolazione che la nostra fantasia esegue sui dati bruti della esperienza; si potrebbe dire infatti che la fantasia colma le lacune, costituite dalla limitatezza dei nostri sensi, integra e completa le immagini che le osservazioni e le esperienze ci forniscono. Ciò ha portato forse nel passato qualche pensatore alla convinzione che esista un "continuo geometrico", immaginato come qualche cosa che esiste per sé, e della quale noi dobbiamo soltanto scoprire le proprietà, che sono una specie di dati di natura. La possibilità di costruire diverse teorie del continuo, tutte ugualmente coerenti, e quindi legittime, ed oggi la possibilità di costruire delle teorie come quella dei frattali, che ci aiutano ad indagare la struttura intima della realtà materiale del mondo che ci circonda, dimostra la verità del fatto che le immagini non sono fondamenti validi per la deduzione rigorosa, e che la fantasia, pur aiutando in modo insopprimibile la creazione delle teorie e delle conoscenze certe non può essere la base per la deduzione rigorosa concettuale.

Carlo Felice Manara

Università di Milano

NOTE.

- (1) La dimostrazione della proposizione potrebbe essere data nel modo seguente:

Si danno due diverse rappresentazioni dei punti del segmento unitario, cioè dei numeri reali compresi tra zero e uno. Si osserva infatti che ogni numero reale x cosiffatto può essere rappresentato da una serie del tipo della seguente:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(i)}{2^i} \quad b(i) = 0 \text{ vel } b(i) = 1$$

oppure da una serie come la seguente:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(k)}{3^k}$$

$$c(k) = 0 \quad \text{vel} \quad c(k) = 1 \quad \text{vel} \quad c(k) = 2.$$

Si vuol dire che la prima relazione fornisce la rappresentazione di x in base 2 e la seconda la fornisce in base 3. Nel primo caso le cifre $b(i)$ della rappresentazione possono assumere i valori 0 e 1, nel secondo caso i valori 0,1,2. E' possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra ogni numero x rappresentato nella prima forma ed un sottoinsieme dei numeri rappresentati nella seconda forma: ciò si ottiene facendo corrispondere ad ogni numero x rappresentato nella prima forma il numero y che si ottiene dalla seconda formula ponendo:

$$c(k) = 1 + (-1)^{b(k)+1}$$

Questa legge potrebbe essere enunciata in parole dicendo che la rappresentazione in base 3 del numero che corrisponde al numero x dato dalla prima formula si ottiene sostituendo ad ogni cifra 1 della rappresentazione binaria la cifra 2 della rappresentazione in base 3, e lasciando invariata la cifra 0.

Inversamente, quando si abbia la rappresentazione in base 3 di un numero y , nella quale compaiono soltanto le cifre 0 e 2, si ottiene il numero x corrispondente con la formula:

$$b(i) = \frac{c(i)}{2}$$

Ora è facile verificare che, escludendo dalla rappresentazione in base 3 tutte le cifre 1, si ottengono i punti del segmento unitario della retta dal quale sono stati soppressi tutti i punti dei segmenti centrali, secondo la procedura esposta in precedenza.

- (2) Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Giornata I. In questo passo il grande pisano, per bocca dell'interlocutore Salviati, osserva che, nella successione dei numeri naturali, i quadrati sono certamente meno numerosi dei numeri non quadrati; tuttavia si può porre una corrispondenza biunivoca tra i numeri

naturali che sono quadrati e l'insieme di tutti i numeri naturali. Il paradosso viene risolto con l'osservazione:

"Io non veggio che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo negl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate".

- (3) Peano (Giuseppe) . Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*. T.37 (1890).
- (4) Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Comp., 1983. Il Mandelbrot si è occupato di statistica, di linguistica e di altri argomenti; ma la teoria dei frattali costituisce la parte della sua produzione scientifica che gli ha procurato la maggiore notorietà, anche per il numero delle pubblicazioni che l'Autore ha dedicato a questo campo di ricerca.
- (5) Peano (Giuseppe) = *Formulario mathematico*. Editio V (Torino, 1908). Pag.239.